

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1988

PREMIÈRE ÉPREUVE

MATHÉMATIQUES

OPTION M,P',T.A

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Notations et objectif du problème

On désigne par $C^\infty(\mathbb{R})$ (resp. par $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$) le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (resp. de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$) qui sont indéfiniment dérivables. Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions complexes de deux variables réelles (x, y) définies et pourvues de dérivées partielles continues à tous les ordres dans l'ouvert $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ est noté $C^\infty(\mathbf{D})$. Si f est un élément de $C^\infty(\mathbf{D})$, les parties réelle et imaginaire de f sont des fonctions de $C^\infty(\mathbf{D})$ à valeurs réelles telles que $f = g + ih$ et, par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Dans le cours du problème, on utilise les deux fonctions suivantes, éléments de $C^\infty(\mathbf{D})$:

$$t : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$$

$$r : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On admettra que si f est élément de $C^\infty(\mathbf{D})$, il existe une fonction unique notée $\tilde{f}$ élément de $C^\infty(\mathbf{D})$, telle que pour tout couple (x, y) de $\mathbf{D}$

$$f(x, y) = \tilde{f}\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \frac{y}{x}\right).$$

(Le second membre pouvant être encore notée $\tilde{f}(r, t)$.)

Le produit habituel de deux fonctions f et g est noté fg . Si f est à valeurs réelles (resp. à valeurs réelles strictement positives) indéfiniment dérivable dans $\mathbf{D}$ et si φ , est un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$ (respectivement si φ est un élément de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$), $\varphi \circ f$ ou $\varphi(f)$ désigne la fonction composée, élément de $C^\infty(\mathbf{D})$ qui associe à (x, y) de $\mathbf{D}$ le nombre $\varphi(f(x, y))$.

La fonction f de $C^\infty(\mathbf{D})$ étant donnée, on lui associe $\mathbf{T}(f)$ noté aussi $\mathbf{T}f$ élément de $C^\infty(\mathbf{D})$, défini pour tout (x, y) de $\mathbf{D}$ par :

$$\mathbf{T}f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

L'application $\mathbf{T}$ ainsi définie de $C^\infty(\mathbf{D})$ dans $C^\infty(\mathbf{D})$ est un endomorphisme. Pour tout complexe α on définit le noyau N_α , de l'endomorphisme $\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}$ où $\mathbf{I}$ est l'application identique de $C^\infty(\mathbf{D})$:

$$N_\alpha = \{ f \in C^\infty(D) \mid \mathbf{T}f - \alpha f = 0 \}.$$

L'objectif du problème est l'étude des divers noyaux N_α et de noyaux de polynômes de $\mathbf{T}$, ce qui conduit à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dans le domaine $\mathbf{D}$.

Partie I

- f et g étant deux éléments de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$, exprimer $\mathbf{T}(fg)$ en fonction de $f, g, \mathbf{T}f$ et $\mathbf{T}g$.
 - Soit f un élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ auquel on associe, comme il est dit dans le préambule, $\tilde{f}$ telle que $f(x, y) = \tilde{f}(r, t)$. Exprimer $\mathbf{T}f$ à l'aide notamment des dérivées partielles de $\tilde{f}$ notées :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}.$$

- Soit f , à valeurs réelles, élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$, calculer $\mathbf{T}(\varphi \circ f)$ où φ est un élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Étude de $\mathbf{N}_0$.
 - Calculer $\mathbf{T}t$.
 - Montrer que si $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, alors $\varphi \circ t \in \mathbf{N}_0$.
 - Déduire des questions précédentes une expression générale des fonctions de $\mathbf{N}_0$
- Étude de $\mathbf{N}_1$.
 - Calculer $\mathbf{T}r$.
 - Soit $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, exprimer $\mathbf{T}(\varphi \circ r)$ et en déduire $\mathbf{T}(r^k)$ où l'exposant k est arbitraire dans $\mathbb{Z}$.
 - Montrer l'équivalence :

$$f \in \mathbf{N}_1 \iff r^{-1}f \in \mathbf{N}_0.$$

En déduire une expression générale des fonctions de $\mathbf{N}_1$.

- Étude de $\mathbf{N}_\alpha$.
 - Déterminer, de manière analogue à ce qui précède, une expression générale des fonctions de $\mathbf{N}_k$ où k est arbitraire dans $\mathbb{Z}$.
 - Lorsque α est un complexe, on pose $r^\alpha = e^{\alpha \ln r}$. Calculer $\mathbf{T}(r^\alpha)$ et en déduire une expression générale des éléments de $\mathbf{N}_\alpha$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose donnés deux nombres complexes α et β , une fonction g non nulle élément de $\mathbf{N}_\beta$ et une fonction φ_0 élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On se propose de résoudre l'équation d'inconnue f , élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$:

$$\mathbf{T}f - \alpha f = g\varphi_0(r).$$

- On suppose d'abord $\varphi_0 = 1$, l'équation devenant alors :

$$(1) \quad \mathbf{T}f - \alpha f = g.$$

- On suppose en outre $\alpha \neq \beta$. Montrer que l'équation (1) admet une solution particulière f_0 proportionnelle à g . En déduire l'expression générale des solutions de (1).
 - On suppose maintenant $\alpha = \beta$. Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation (1) qui est de la forme $f_0 = \varphi(r)g$ où φ est une fonction de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ que l'on explicitera. En déduire la forme de la solution générale de (1).
- Résoudre les équations suivantes où f élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ est l'inconnue :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy}, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x + y}, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

- Dans cette question, g est un élément de $\mathbf{N}_\beta$ et φ_0 est une fonction, élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On se propose de résoudre avec ces données l'équation :

$$(2) \quad \mathbf{T}f - \alpha f = g\varphi_0(r).$$

- (a) Montrer qu'il existe une solution particulière de l'équation (2) qui est de la forme $f_0 = \varphi(r)g$ où la fonction φ est un élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ s'exprimant à l'aide de la fonction φ_0 . En déduire l'expression générale des solutions de l'équation (2), expression dans laquelle figure une intégrale.
- (b) Trouver, en particulier, les solutions de l'équation :

$$\mathbf{T}f - \alpha f = g \ln r$$

où g est un élément donné de $\mathbf{N}_\alpha$ (autrement dit : $\beta = \alpha$).

Partie III

On définit les puissances successives de l'endomorphisme $\mathbf{T}$ de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ de la façon habituelle :

$$\forall f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{D}), \quad \mathbf{T}^2 f = \mathbf{T}(\mathbf{T}f)$$

$$\mathbf{T}^n f = \mathbf{T}(\mathbf{T}^{n-1} f), \quad (n > 2).$$

1. Trouver l'expression générale des fonctions f de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ telles que $\mathbf{T}^2 f = 0$.
2. g étant une fonction donnée dans $\mathbf{N}_0$, trouver l'expression générale des fonctions f de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ solutions de $\mathbf{T}^2 f = g$ (On pourra passer par l'immédiat de la nouvelle fonction inconnue $u = \mathbf{T}f$)
3. En raisonnant par récurrence, déduire de ce qui précède l'expression générale des fonctions f constituant le noyau de l'endomorphisme $\mathbf{T}^n$. (On montrera, en particulier, que cette expression fait intervenir n fonctions arbitraires.)

Partie IV

1. α et β sont, à nouveau, deux nombres complexes donnés non tous deux nuls. Résoudre dans $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$:

$$(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}) \circ (\mathbf{T} - \beta \mathbf{I}) f = 0$$

2. α, β, γ étant trois complexes donnés, résoudre l'équation :

$$(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}) \circ (\mathbf{T} - \beta \mathbf{I}) f = g$$

où g est donnée dans $\mathbf{N}_\gamma$. On discutera suivant les valeurs de α, β, γ .

3. Résoudre l'équation d'inconnue f ($f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$) :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{D}, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = kf(x, y),$$

où k est un nombre complexe donné.